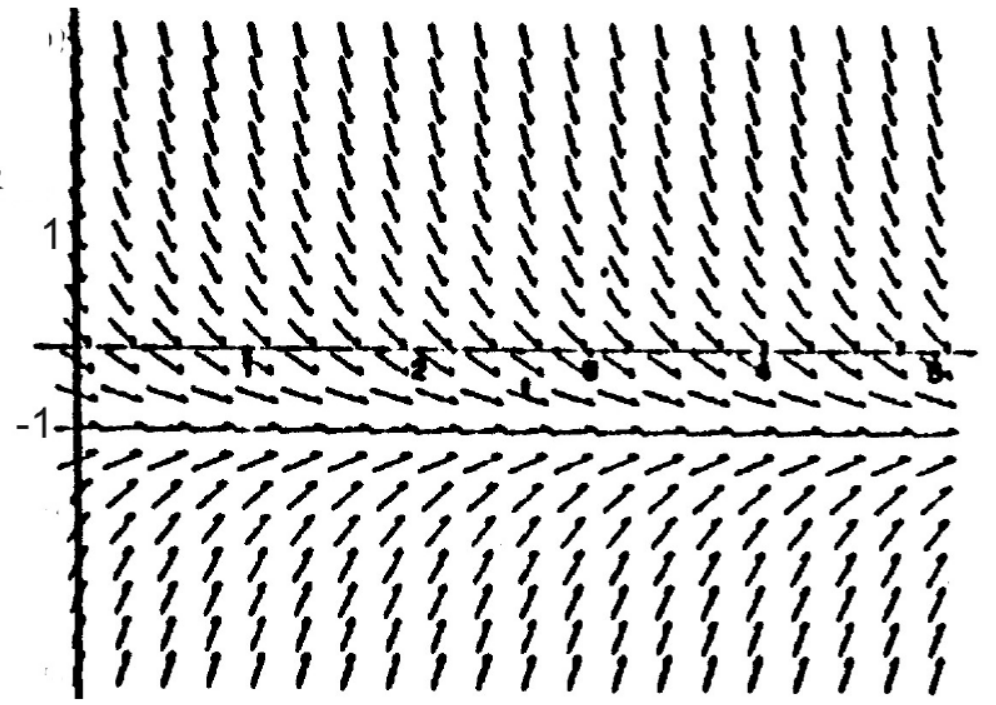


Geometrik olarak (4) denklemini herhangi bir (t, y) noktasında, çözümün $\frac{dy}{dt}$ eğiminin, $f(t, y)$ tarafından verildiğini söyler. Bunu o noktadan geçen $f(t, y)$ eğimine sahip kısa doğru parçaları çizerek gösterilir. Bütün bu doğru parçalarının ailesine (4) dif. denkleminin doğrultu alanı denir.

Örnek: $\frac{dy}{dt} = -\frac{1+y}{2}$ dif. denkleminin doğrultu alanı aşağıdaki şekilde gibidir.



2. BİRİNCİ MERTEBEDEN DİF. DENKLEMLER

f , iki değişkenli verilen bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (2.1)$$

şeklinde ifade edilen 1. mertebeden dif. denklemlerle ilgileneceğiz.

2.1 Linear Dif. Denklemler

Eğer (2.1) denklemindeki f fonksiyonu bağımlı değişken y 'ye göre lineer ise

bu durumda dif. denklemin

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

for.unda yazılabilir. Buna 1. mertebeden lineer dif. denklemin denir. Şimdi $p(t), g(t)$ fonksiyonlarının bir $\alpha < t < \beta$ aralığında sürekli olarak verildiğini düşünelim.

Örneğin $\frac{dy}{dt} - 3y = 2$ denklemini çözmeye çalışalım.

Çözüm.

$$\frac{dy}{dt} = 3y + 2 = 3\left(y + \frac{2}{3}\right)$$

$y \neq -\frac{2}{3}$ ise

$$\frac{dy}{dt} = 3 \quad \text{veya} \quad \frac{d}{dt} \ln |y + \frac{2}{3}| = 3$$

buradan (her iki tarafın integrali alınırsa)

$$\ln |y + \frac{2}{3}| = 3t + C$$

$$|y + \frac{2}{3}| = e^{3t+C} = e^{3t} \cdot e^C$$

$$y + \frac{2}{3} = \pm e^C e^{3t} \quad c = \pm e^C$$

$$y = -\frac{2}{3} + c e^{3t}$$

$(0, \frac{4}{3})$ noktasını içeren çözüm

$$\frac{4}{3} = -\frac{2}{3} + c \Rightarrow c = 2 \quad y = -\frac{2}{3} + 2e^{3t}$$

Data genel olarak 1. mertebeden sabit katsayılı lineer drf. denklemlerin çözümüne bakalım.

$$\frac{dy}{dt} = ry + k \quad r, k \in \mathbb{R} \text{ (sabitler)} \quad (2.2)$$

$y \neq -\frac{k}{r}$ ise ve $r \neq 0$ ise

$$\frac{dy}{dt} = r \Rightarrow \ln |y + \frac{k}{r}| = rt + C$$

Eğer $r=0$ ise $y = -\frac{k}{r} + c e^{rt} \quad c = \pm e^C \quad (2.3)$

dir. $y = kt + c$

Integral forpanları: (2.2) dif. denklemini çözmek bize katsayıları sabit olmayan lineer drf denklemlerini çözmek için bir ipucu verir. (2.3) denklemini

$$y e^{-rt} = -\frac{k}{r} e^{-rt} + c \quad (2.4)$$

şeklinde yazalım ve her iki tarafın t 'ye göre türevini alalım;

$$(y' - ry) e^{-rt} = k e^{-rt} \quad (2.5)$$

formunu elde ederiz. Bu bize (2.5)'in (2.2)'ye denk ol. söyler. Buna göre (2.2) denklemini tekrar çözelim. (2.2)'de ry 'yi üstteki soluna alıp

her iki tarafı e^{-rt} ile çarpalım. Bu bize (2.5)'i verir. (2.5)'in sol tarafı $y e^{-rt}$ 'nin türevidir. Buna göre

$$(y e^{-rt})' = k e^{-rt} \quad (2.6)$$

dir. Sonuçta (2.6)'nın her iki tarafının integrali alınırsa (2.4) elde edilir. Yani

$$y = -\frac{k}{r} + c e^{rt}$$

dir. (2.2) denklemini çözmek için bir yoldur (2.2) denklemini e^{-rt} fonksiyonu ile çarpmaktır.

Bu çarpım denklemini hemen integre edilebilir forma getirdiği için e^{-rt} fonksiyonuna (2.2) denkleminin integrasyon çarpanı denir.

Şimdi amacımız

$$y' + p(t)y = q(t) \quad (2.7)$$

dif. denklemini uygun integral çarpanı ile çarpıp denklemini integre edilebilir form haline dönüştürmek. Bu integral çarpanını bulmak için (2.7) denklemini daha bulmadığımız $\mu(t)$ fonksiyonu ile çarpmak olacaktır. Bu durumda

$$\mu(t)y' + \mu(t)p(t)y = \mu(t)q(t) \quad (2.8)$$

(2.8) denkleminin sol tarafını bir fonksiyonun türevi olarak düzenlemek istiyoruz.

(2.8)'in sol tarafının $\mu(t)y'$ 'nin türevi olabilmesi için, $\mu(t)$ 'nin

$$\mu'(t) = \mu(t)p(t)$$

denklemini sağlaması gereklidir. Eğer $\mu(t)$ 'yi pozitif kabul edersek

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = p(t) \quad \text{veya} \quad \frac{d}{dt} \ln \mu(t) = p(t)$$

ve

$$\ln \mu(t) = \int p(t) dt + C$$

elde ederiz. C sabitini sıfır alarak $\mu(t)$ 'yi daha basit olarak

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt} \quad (2.9)$$

olarak elde ederiz. ($\forall t$ için $\mu(t) > 0$)

Integral çarpanı $\mu(t)$ 'yi bulduktan sonra (2.7) denklemine tekrar döner ve $\mu(t)$ ile çarparsak

$$(\mu(t)y)' = \mu(t)q(t) \quad (2.10)$$

elde ederiz. (2.10)'ün her iki tarafının integralini alırsak y ,

$$\mu(t)y = \int \mu(t)q(t) dt + C$$

veya

$$y = \frac{\int \mu(t)q(t) dt + C}{\mu(t)} \quad (2.11)$$

olarak bulunur.

y , (2.7)'nin herhangi bir çözümünü temsil ettiğinden (2.7)'nin her çözümünün (2.11)'in sağ tarafında içtiği sonuca varırız. Bu yüzden buna (2.7)'nin genel çözümü denir.

(2.11)'in geometrik yorumu C 'ye bağlı olarak sonsuz eğri ailesidir. Bu eğrilere integral eğriler denir. Bazen bu integral eğrilerinden birini almak isteriz. Bu çözüm fonksiyonun grafiğinin geçmesi gereken (t_0, y_0) noktası belirtilerek yapılır. Bu genellikle

$$y(t_0) = y_0 \quad (2.12)$$

yaıubruk yapılır ve buna başlangıç koşulu denir. Başlangıç koşulu verilen 1. mertebeden dif. denkleme başlangıç değer problemi denir.

Örneki: 1) $y' + 3y = e^{-2t}$ $y(0) = 2$ başlangıç değer problemini çözüünüz.

$$p(t) = 3 \quad g(t) = e^{-2t}$$

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt} = e^{\int 3 dt} = e^{3t}$$

$$y = \frac{\int \mu(t)g(t)dt + C}{\mu(t)} = \frac{\int e^{3t} e^{-2t} dt + C}{e^{3t}}$$

$$y = \frac{e^t + C}{e^{3t}} = e^{-2t} + C e^{-3t}$$

$$t=0 \quad y=2 \quad 2 = 1 + C \Rightarrow C=1$$

$$y = e^{-2t} + e^{-3t}$$

$$2) \quad y' + \frac{2}{t}y = \frac{\cos t}{t^2} \quad y(\pi) = 0, \quad t > 0$$

başlangıç değer prob. çözü.

$$p(t) = \frac{2}{t} \quad g(t) = \frac{\cos t}{t^2}$$

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt} = e^{\int \frac{2}{t} dt} = e^{2 \ln t} = t^2$$

$$y = \frac{\int \mu(t)g(t)dt + C}{\mu(t)} = \frac{\int t^2 \cdot \frac{\cos t}{t^2} dt + C}{t^2}$$

$$= \frac{\sin t + C}{t^2}$$

$$t = \pi \quad y = 0 \quad 0 = \frac{0 + C}{\pi} \Rightarrow C = 0$$

$$y = \frac{\sin t}{t^2}$$